Chapitre 5 : Vecteurs propres et valeurs propres

<u>But:</u> Etudier $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On observe que :

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A agit comme la mult. par le scalaire 4 sur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ idem

$A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ idem

mais : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ l'action de A est différente.

Définition 50 (vecteur propre).
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un <u>vecteur propre de A si $v \neq 0$</u> et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que <u>$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$</u>.

On appelle λ la <u>*valeur propre* associée à v</u>.

<u>Remarque:</u> La valeur propre λ peut être nulle !

Exemple Trouvons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On doit résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} v_1 + 3v_2 = \lambda v_1 \\ 2v_1 + 2v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right)$$ Syst. homogène.

Pour obtenir un vecteur propre, on doit trouver une sol. non triviale, i.e.

$A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_2) \neq \{\vec{0}\}$$

et donc $A - \lambda I_2$ doit être singulière, donc $\det(A - \lambda I_2) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2\cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$
$$= (\lambda-4)(\lambda+1)$$

et $\det(A-\lambda I_2) = 0 \iff \lambda \in \{4 ; -1\}$

On a trouvé deux valeurs propres.

Pour $\lambda = -1$: On cherche $\vec{v}$ avec $(A-\lambda I_2)\vec{v} = \vec{0}$

donc $(A+I_2)\vec{v} = \vec{0}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_2 \text{ libre} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v_1 = -3/2\, v_2 \\ v_2 \text{ libre} \end{cases} \iff \vec{S} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}^*$$

(on exclut le vecteur nul)

Pour $\lambda = 4$: $(A - 4I_2)\vec{v} = \vec{0}$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\dots}{\iff} \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}^*$$

Donc $\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{v} = t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}^* \right\}$ est l'ens. des vecteurs propres associés à $\lambda = -1$.

Cet ensemble n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$.

On définit l'espace propre associé à $\lambda = -1$ par

$$E_{-1} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{v} = t\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}^* \right\} \underset{\text{union}}{\cup} \{\vec{0}\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_{-1} est bien un SEV de $\mathbb{R}^2$.

Généralisation à $\mathbb{R}^n$

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres associés :

- on trouve les valeurs propres c'est-à-d. en résolvant

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

- Pour λ donné, on trouve $\vec{v} \neq \vec{0}$ en résolvant

$$(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}.$$

Ceci donne l'ens. des vecteurs propres associés à λ.

Définition 51 (espace propre).

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Alors *l'espace propre* E_λ associé à la valeur propre λ est défini par

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$$

E_λ est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 46. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors $\lambda \in \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si et seulement si* λ satisfait l'équation

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Définition 52 (équation et polynôme caractéristique)**.**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. L'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$ s'appelle *l'équation caractéristique* de A. On pose

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

$P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ, appelé pol. caractéristique.

Remarque

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Dans le calcul du det, un des termes sera le produit $\prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$ des coeff. de la diagonale.

Il se peut que $P_A(\lambda)$ admette des racines complexes.

<u>ex:</u> $P_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2+1) = \lambda(\lambda - i)(\lambda + i)$

3 racines dans $\mathbb{C}$: $\{0; \pm i\}$

1 " dans $\mathbb{R}$: $\{0\}$.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \Rightarrow -1$ est une racine double.

$p(t) = at^2 + bt + c \qquad \Delta = b^2 - 4ac$

Théorème 47. *Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.*

En effet, $p_A(\lambda)$ étant de degré n, il admet n racines (réelles ou complexes, pas forcément distinctes).

Il y a au plus n valeurs propres réelles distinctes.

Définition 53 (multiplicité algébrique).
On appelle la *multiplicité algébrique* d'une valeur propre sa multiplicité en tant que racine de $p_A(\lambda)$.

C'est le nombre de fois que λ apparaît en tant que racine de $p_A(\lambda)$.

Exemples

1) $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda) \Rightarrow \lambda \in \{1; -2; +2\}$

Il y a 3 racines réelles distinctes, toutes de multiplicité alg. 1.

2) $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2+\lambda)^2 \Rightarrow \lambda \in \{1; -2\}$

La racine $\lambda = -2$ est de multiplicité alg. 2.

3) $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ $\qquad \Delta = 1^2 - 4.1.1 = 1-4 = -3 < 0$

$i^2 = -1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Deux racines complexes distinctes de mult. alg. 1.

Définition 54.
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle la *trace* de A le nombre

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ (somme des coeff. de la diagonale principale)

Cas particuliers

Dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad T_r(A) = a_{11} + a_{22}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$= \lambda^2 - T_r(A)\,\lambda + \det(A)$$

Dans $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 - (\ldots)\lambda + \det(A)$

Remarques

1) le coeff. de λ^n est $(-1)^n$.
2) le coeff. de λ^{n-1} est $(-1)^{n-1} T_r(A)$
3) le terme constant est $\det(A)$

⚠ Ici on considère $\det(A - \lambda I_n)$ et non pas $\det(\lambda I_n - A)$

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$
car A est triang. sup.

$\lambda = 1$ valeur propre de mult. alg. 2

$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_2 \text{ libre} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 \text{ libre.} \end{cases}$

$$\vec{s} = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 \text{ libre} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$E_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ à faire en exercice et comparer avec 1)

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. On obtient $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 52\lambda + 60$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(-\lambda^2 + \dots + \beta) \qquad -\alpha\beta = 60$$

60 est divisible par les racines de $p_A(t)$: d'où les candidats $\pm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$

On teste $p_A(1) \neq 0$ $\quad p_A(2) = 0 \Rightarrow 2$ est une racine

$p_A(-1) \neq 0$

On aura $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)\underset{(*)}{(\dots)}$. Pour trouver $(*)$, on a recours à la division polynomiale :

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 52\lambda + 60 & \lambda - 2 \\ \hline -(-\lambda^3 + 2\lambda^2) \qquad\qquad\qquad & -\lambda^2 + 11\lambda - 30 \\ 11\lambda^2 - 52\lambda + 60 & \\ -(11\lambda^2 - 22\lambda) \qquad & \\ -30\lambda + 60 & \\ -(-30\lambda + 60) & \\ 0 & \end{array}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 11\lambda - 30) = -(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 6)$$

et $\lambda \in \{2; 6; 5\}$

Théorème 48. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes ($r \leq n$). Alors si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ est linéairement indépendante.*

$\rightsquigarrow$ utile pour la recherche d'une base formée de vecteurs propres.

Exercice : montrer le th. pour $r = 2$

Cas particulier de $\lambda = 0$

Dans ce cas, $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ devient $A\vec{v} = \vec{0}$.

Si $\lambda = 0$ est une valeur propre, alors il existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ t.q. $A\vec{v} = \vec{0}$.

Donc $E_0 = \mathrm{Ker}(A - 0I_n) = \mathrm{Ker}(A) \neq \{\vec{0}\}$

Donc A est singulière.

$\downarrow$

Théorème 49. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors $\lambda = 0$ est une valeur propre de A si et seulement si A est singulière.*

En particulier, A est inversible si et seulement si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A.